Séquence 0 : activité-cours outils de démonstration

1 Propositions, négations, implications, équivalences

Définition. *Une proposition mathématique P est un énoncé qui peut être :*

- *soit vrai :*

- *soit faux :*

Exercice 1. *(négation)*
On peut ***nier*** *une proposition P, c'est-à-dire donner une proposition* ***non****P qui est vraie si P est fausse et réciproquement.*

P	*non* P
Le triangle ACD est isocèle.	
	Le quadrilatère $EFGH$ n'est pas un hexagone.
	Le réel x est tel que $x > -1$.
$y \in \mathbb{N}$	
Les droites D et D' sont parallèles.	
	Les trois points distincts H, K et L forment un triangle.
La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.	

Exercice 2. *(implication)*
Lorsque le fait qu'une proposition A est vraie force le fait qu'une proposition B est vraie, alors on dit que A ***implique*** *B, et on not $A \Rightarrow B$. On dit aussi que A est une* ***condition suffisante*** *pour B.*

A	B	$A \Rightarrow B$: *vrai ou faux, pourquoi ?*
AGH est un triangle équilatéral	*AGH est un triangle isocèle*	
N est un multiple de 6	*N est un multiple de 12*	
Un triangle ERT est tel que $\widehat{E} = \frac{\pi}{2}$ rad et $\widehat{R} = \frac{\pi}{3}$ rad.	*ERT est un triangle rectangle.*	
x est un nombre rationnel et y est un nombre irrationnel	*$x + y$ est un nombre irrationnel*	
ABC est un triangle rectangle.	*Le triangle ABC est tel que $AB = 3$, $BC = 5$ et $AC = 8$*	
Z est un nombre réel quelconque.	$Z^2 \geqslant 0$	

Exercice 3. *(équivalence)*
Deux propositions A et B sont équivalentes si A implique B ***et*** *B implique A ou également que A est vraie* ***si, et seulement si,*** *B est vraie : $\begin{cases} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow A \end{cases}$ se note $A \Leftrightarrow B$.*

A	$\Rightarrow$, $\Leftarrow$ *ou* $\Leftrightarrow$	B
$(x-1)(x-2) = 0$		$x = 1$
M est le milieu de $[AB]$		$MA = MB$
DFO est un triangle isocèle		*Les angles à la base sont égaux.*
f' est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$		*f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$*

2 Quantificateurs

Définition. *Lorsqu'une proposition dépend d'un paramètre, on peut utiliser trois types de* ***quantificateurs*** *:*

- *le quantificateur universel « Pour tout ... » : $\forall x \in \mathbb{R} \to$ "pour tout réel x"*
- *le quantificateur existentiel « Il existe ... » : $\exists p \in \mathbb{N} \to$ "il existe un entier naturel p" (au sens d'au moins un)*

- *le quantificateur existentiel strict « Il existe un unique ... » :* $\exists! N \in \mathbb{Z} \rightarrow$ *"il existe un unique entier relatif* N

Exercice 4. *Compléter avec le bon quantificateur :* $\forall$, $\exists$ *ou* $\exists!$.

- $\dots\, p \in \mathbb{N}$ *tel que* $7 < p < 9$.
- *la fonction* f *est positive sur* $[-4\,;\,3]$ *si* $\dots\, x \in [-4\,;\,3]$, $f(x) \geqslant 0$.
- *la fonction dérivée* g' *s'annule sur* $\mathbb{R}$ *si* $\dots\, x \in \mathbb{R}$ *tel que* $g'(x) = 0$.
- $\dots\, x \in \mathbb{R}$, $\dots\, y \in \mathbb{R}$ *tel que* $x + y > 0$.

3 Méthodes de démonstration

3.1 Raisonnement déductif

Le type de raisonnement le plus courant : à partir d'hypothèse(s), on construit un raisonnement logique qui aboutit à la conclusion.

Exemple. *Démontrer que la fonction* f *définie par* $f(x) = -1,5x^3 + 2$ *est décroissante sur* $\mathbb{R}$.

3.2 Disjonction de cas

Il s'agit de démontrer une propriété par exemple selon le type de valeur d'un nombre x. Attention à bien traiter TOUS les cas possibles.

Exemple. *Montrer que pour tout entier naturel* n, *le nombre* $\dfrac{n(n+1)}{2}$ *est un entier naturel.*

3.3 Contre-exemple

Il s'agit d'invalider une affirmation en exhibant un cas qui la contredit, appelé contre-exemple.

Exemple. *Vrai ou faux : pour tout réel* x, *la fonction* f *définie par* $f(x) = x^2 + 2x + 1$ *ne s'annule jamais.*

3.4 Par l'absurde

Lorsque l'on veut démontrer l'implication $A \Rightarrow B$, on suppose que A est vraie et que B est fausse pour aboutir à une contradiction.

Exemple. *Démontrer que* $\sqrt{2}$ *est un nombre irrationnel.*

3.5 Contraposée

Pour démontrer l'implication $A \Rightarrow B$, on montre que *non* $B \Rightarrow$ *non* A.

Exemple. *Démontrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$, n^2 *impair* $\Rightarrow nimpair$.

3.6 Applications

Exercice 5. *Déterminer quel type de raisonnement a été utilisé pour chacun des cas de l'exercice 2.*

Exercice 6.

1. *Démontrer par contraposée que si* x *est un nombre réel tel que pour tout* $\epsilon > 0$ *on a* $x < \epsilon$, *alors* $x \leqslant 0$.
2. *Démontrer par l'absurde que l'ensemble* I *des rationnels strictement supérieurs à 1 n'a pas de plus petit élément.*
3. *Démontrer par l'absurde que si on range* $(n+1)$ *paires de chaussettes dans* n *tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins* 2 *paires de chaussettes.*
4. *Démontrer par disjonction de cas qu'il existe deux nombres irrationnels* x *et* y *tels que* x^y *est un nombre rationnel. (on pourra utiliser le fait que* $\sqrt{2}$ *est un nombre irrationnel).*